SERIES DE NÚMEROS REALES

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series y calcular la suma cuando sea posible:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{2}{e}\right)^{2n}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{2n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3n+1}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n+2^n}{6^n}$ **(g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-4)^n}{3^n}$

2. Hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+x)^{-n} = \frac{1}{3}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1+x)^{-n} = \frac{1}{6}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1+x)^{-n} = \frac{1}{2}$

3. **(a)** Expresar los números decimales $0.\overline{57}$ y $1{,}23\overline{4}$ como razón de dos números enteros.

   (b) Demostrar que $9.\overline{9} = 10$.

4. Se deja caer una pelota desde una altura a sobre una superficie plana y comienza a botar. Cada vez que cae desde una altura h y toca la superficie, la pelota rebota y asciende hasta una altura rh, siendo $0 < r < 1$. Calcular la distancia vertical total recorrida por la pelota. En particular, calcula esta distancia si $a = 2$ m y $r = 4/5$.

5. Se considera un cuadrado de lado l. Calcular el área total sombreada si se continúa sombreando según se indica (cada lado de un cuadrado sombreado es $\frac{1}{4}$ del lado del cuadrado en cuya esquina está situado).

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series y calcular la suma cuando sea posible:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$

7. Calcular la suma de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2-n-2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-1}{n^3-n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{7n+3}{n^3-2n^2-3n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-2)^n+2n}{5^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2-1} - \frac{5}{2^n}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2n^2-8n+6}$

8. Estudiar la convergencia de las siguientes series de términos no negativos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{n^3}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2+n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{8+n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^4+2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}+n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^{4/3}+2}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n^p}\right)^2, \quad p>0$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^p}}\right), \quad p>0.$

9. Estudiar la convergencia de las siguientes series de términos no negativos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n 3^n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}5^n}{(2n)^{n/2}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2 \log 3 \cdots \log n}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n+7}{2^n}$

10. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series de términos positivos y negativos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}(\frac{1}{3n+1})$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1+\frac{1}{n^2})$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-\pi)^{n^2}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n}{(n+1)5^{2n+1}}$

11. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2+1}{5n^5+5}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{6n+5}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{2n}}{5^{2n+1}}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4!n!4^n}{(n+4)!}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(\ln 2)^{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{(n+1)^2}$ **(h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(3n+1)}$

12. Estudiar la convergencia de las siguientes series dependiendo de los valores de $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}x^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2x)^n}{n^3(n+2)}$